Exercice 1 : Equilibre d'un cylindre sur plan incliné

1) Si $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ désigne la réaction du support sur le cylindre en équilibre alors on a $\vec{R} + m\vec{g} = 0$. En projetant sur les axes parallèle et perpendiculaire, on obtient

$$T = mg \sin\alpha \qquad N = mg \cos\alpha.$$

2) Loi de Coulomb du frottement solide pour un solide en équilibre : $T \leq \mu N$, soit $\tan\alpha \leq \mu$. Si $\tan\alpha \geq \mu$, le cylindre n'est plus en équilibre vis-à-vis du glissement.

3) Théorème du moment cinétique par rapport à G dans le référentiel du centre de masse : $\overrightarrow{GI} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{GG} \wedge (m\vec{g}) = 0$, soit $\overrightarrow{GI} \wedge (\vec{T} + \vec{N}) = 0$, ce qui revient à dire que le point I est à la verticale de G puisque $\vec{R}$ compense le poids. Comme le vecteur $\vec{GI}$ a pour coordonnées $(a, -h/2, 0)$, on a $aN = hT/2$, soit encore en utilisant le résultat de la question 1) $a = h\tan\alpha/2$.

4) Le cylindre ne bascule pas tant que le point d'application I de la réaction $\vec{R}$ calculé précédemment est bien sur la surface de contact, c'est-à-dire tant que $a < R$. Le cylindre reste en équilibre vis-à-vis du basculement si $\tan\alpha < 2R/h$.

5) En pratique, si $\mu < 2R/h$, en augmentant progressivement $\tan\alpha$, on va atteindre la condition de glissement **avant** celle de basculement et le cylindre va glisser sur le plan incliné. C'est le cas du cylindre $h = R$.

En revanche si $\mu > 2R/h$, on atteint la condition de basculement **avant** celle de glissement et le cylindre commence par basculer (cas du premier cylindre $h = 30R$).

Exercice 2 : Mouvement d'une barre contre un mur

1) La barre est homogène, donc G est en son milieu. Les triangles OGA et OGB sont isocèles puisque $OG = AG = BG = \ell/2$.

2) Si $\lambda = m/\ell$ est la densité linéique de masse, on a

$$I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \lambda\, l^2 \,\mathrm{d}l = \frac{1}{12} m\ell^2.$$

3) Théorème de Koenig :

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} m v_G^2.$$

Dans le référentiel du centre de masse, la barre a mouvement de rotation pure autour de (Gz) : $E_c = I\,\dot{\theta}^2/2 = m\ell^2\,\dot{\theta}^2/24$.

Le centre de masse G décrit une trajectoire circulaire de centre O et de rayon $\ell/2$, sa vitesse est donc $v_G = \ell\dot{\theta}/2$, d'où

$$E_c = \frac{1}{24} m\ell^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8} m\ell^2\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} m\ell^2\,\dot{\theta}^2.$$

4) Puisque le contact barre/mur est sans frottements, l'énergie mécanique $E_c + E_p$ de la barre se conserve. Comme $E_p = mg\,y_G = mg\ell\,\sin\theta/2$, on a

$$E_m = \frac{1}{6} m\ell^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mg\ell\,\sin\theta = \frac{1}{2} mg\ell\,\sin\theta_0 \quad\Longrightarrow\quad \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{\ell}\,(\sin\theta_0 - \sin\theta).$$

5) L'accélération du centre de masse s'écrit

$$\vec{a}_G = \frac{\ell}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\sin\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\dot\theta\,\vec{e}_y\right) = \frac{\ell}{2}\left[\left(-\cos\theta\,\dot\theta^2 - \sin\theta\,\ddot\theta\right)\vec{e}_x + \left(-\sin\theta\,\dot\theta^2 + \cos\theta\,\ddot\theta\right)\vec{e}_y\right]$$

En dérivant l'intégrale première du mouvement, on obtient

$$\ddot\theta = -\frac{3g}{2\ell}\cos\theta,$$

qui est l'équation du mouvement.
En remplaçant les expressions de $\dot\theta^2$ et $\ddot\theta$ dans $\vec{a}_G$, on obtient pour la composante x :

$$\ddot{x}_G = \frac{3g}{2}\left(-\cos\theta\,(\sin\theta_0 - \sin\theta) + \frac{1}{2}\cos\theta\,\sin\theta\right)$$

Par conséquent, en appliquant le TCM, la réaction du mur vertical en B (qui est horizontale !) s'écrit

$$R_B = m\ddot{x}_G = \frac{3mg}{2}\cos\theta\left(\frac{3}{2}\sin\theta - \sin\theta_0\right)$$

Au début $\theta = \theta_0$, la réaction R_B est positive et la barre s'appuie sur le mur. Mais, en glissant θ diminue et R_B diminue. Lorsque $\theta = \theta_1$ tel que $\sin\theta_1 = 2\sin\theta_0/3$, la réaction R_B s'annule et le contact de la barre sur le mur est rompu (la barre n'appuie plus sur le mur).